Title	Generalized Recursion Theory (Proof theoryとRecursion theory研究会報告集)
Author(s)	高橋, 元男
Citation	数理解析研究所講究録 (1970), 86: 13-26
Issue Date	1970-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/108084
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
86 巻 1970 年 13-26

Generalized recursion theory.

立教大理　高橋元男

§1. 公理系RBGとそのsyntax.

Bernays-Gödelの公理系BGを弱めたRBGを次のように定義する：

A, B, D群の公理はそのままとしC群の公理から，巾集合の公理　と無限の公理を除き，空集合の存在公理をつけ加える.

（ Cls, $\mathfrak{M}$の代りにClass, Setを用いる以外は，Gödelのmonographのnotationに概ね従う.）

定理1.（類の存在定理.）　$\varphi(x; X_1, \cdots, X_n)$ を任意のformula（$x, X_1, \cdots, X_n$ のみを自由変数とする）とすれば

$$\vdash \forall X_1 \cdots \forall X_n \exists ! Y \forall x [x \in Y \equiv \varphi(x; X_1, \cdots, X_n)].$$

これはGödelのmonographの通りである.

定理2.（帰納法の原理.）$\varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, X_1, \cdots, X_n)$

をΣ_1（bounded formula（集合についての bounded quantifier 以外の quantifier を含まない式）の前に（unbounded）existential quantifier をつけた形の式）で，X は $t \in X$ の形で φ の positive parts にのみ現われる，とする．このとき

$$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_m \forall Y_1 \cdots \forall Y_n \exists! X [\forall x [x \in X \equiv \varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)] \wedge \forall Z [\forall x [\varphi(x, Z; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n) \supset x \in Z] \supset Y \subseteq Z]].$$

証明の outline．φ を定理の仮定をみたすものとすれば，

(1). $X_1 \subseteq X_2 \wedge \varphi(x, X_1; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n) \supset \varphi(x, X_2; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$.

及び

(2). $\varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n) \supset \exists z [z \subseteq X \wedge \varphi(x, z; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)]$

が証明される．以下［　］参照．

注）上の X を

$x \in X \overset{ind}{\equiv} \varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$,

$X \overset{ind}{=} \{x \mid \varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)\}$

等と書き，φ によって帰納的に定義された類と呼ぶ．また以下においては，もっと省略した書き方もする．

§2. Formal Recursion Theory.

先ず，類 W を帰納的に（即ち定理2を用いて）次の様に定義する：

D.1. $W \overset{ind}{=} \{\langle\langle 0,a\rangle, x\rangle \mid x \in a\}$

$\cup \{\langle\langle 1,0\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid x \in y\}$

$\cup \{\langle\langle 1,1\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid x \notin y\}$

$\cup \{\langle\langle 2ab\rangle, x\rangle \mid \langle ax\rangle \in W \wedge \langle bx\rangle \in W\}$

$\cup \{\langle\langle 3ab\rangle, x\rangle \mid \langle ax\rangle \in W \vee \langle bx\rangle \in W\}$

$\cup \{\langle\langle 4a\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid \forall t \in x [\langle a\langle ty\rangle\rangle \in W]\}$

$\cup \{\langle\langle 5a\rangle, x\rangle \mid \exists y [\langle a\langle yx\rangle\rangle \in W]\}$

$\cup \{\langle\langle 6a\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid \langle ay\rangle \in W\}$

$\cup \{\langle\langle 7a\rangle, \langle xy\rangle\rangle \mid \langle a, \langle yx\rangle\rangle \in W\}$

$\cup \{\langle\langle 8a\rangle, \langle xyz\rangle\rangle \mid \langle a, \langle xzy\rangle\rangle \in W\}$

$\cup \{\langle\langle 9a\rangle, \langle xyz\rangle\rangle \mid \langle a, \langle yzx\rangle\rangle \in W\}$.

D.2. $A_a = \{x \mid \langle ax\rangle \in A\}$.

D.3. $\mathcal{RE}(A) \equiv \exists a [A = W_a]$, ($A$ は recursively enumerable)

$\mathcal{RC}(A) \equiv \mathcal{RE}(A) \wedge \mathcal{RE}(-A)$, ($A$ は recursive)

$\mathcal{PRF}(A) \equiv \mathcal{U}n(A) \wedge \mathcal{RE}(A)$, ($A$ は partial recursive function)

$\mathcal{RF}(A) \equiv \mathcal{PRF}(A) \wedge \mathcal{D}(A) = V$,

(A は recursive function)

$\mathcal{PRF}_n(A) \equiv \mathcal{PRF}(A) \wedge \mathcal{D}(A) \subseteq V^n$,

(A は n 変数の partial recursive function),

$\mathcal{RF}_n(A) \equiv \mathcal{PRF}(A) \wedge \mathcal{D}(A) = V^n$

(A は n 変数の recursive function).

T1. $W_{\langle 0a \rangle} = a$,

$W_{\langle 1,0 \rangle} = E$, $W_{\langle 1,1 \rangle} = \dot{E} = \{\langle xy \rangle \mid x \neq y\}$,

$W_{\langle 2,a,b \rangle} = W_a \cap W_b$, $W_{\langle 3,a,b \rangle} = W_a \cup W_b$,

$W_{\langle 4\,a \rangle} = W_a^{\pi}$ $(A^{\pi} = \{\langle xy \rangle \mid \forall t \in x[\langle ty \rangle \in A]\})$,

$W_{\langle 5a \rangle} = \mathcal{D}(W_a)$, $W_{\langle 6a \rangle} = V \times W_a$,

$W_{\langle 6+i,a \rangle} = Conv_i(W_a)$ $\quad i = 1, 2, 3.$

は W の定義より明らか. さらに、これらを組合せると,

T2. $\mathcal{W}(W_a) = \mathcal{D}(W_a^{-1}) = W_{\langle 5,7,a \rangle}$,

$a^c (= V - a) = \dot{E}''\{a\} = \mathcal{W}(\dot{E} \cap (V \times \{a\}))$

$= W_{\langle 5,7,2,\langle 1,1 \rangle,6,0,\{a\} \rangle}$,

$W_a{}'' W_b = \mathcal{W}(W_a \cap (V \times W_b))$

$= W_{\langle 5,7,2,a,6,b \rangle}$,

$W_a \restriction W_b = W_{\langle 2,a,6,b \rangle}$,

$I = \{\langle xy \rangle \mid \forall t \in x[t \in y] \wedge \forall t \in y[t \in x]\}$

$= E^{\pi} \cap E^{\pi,-1} = W_{\langle 2,\langle 4,1,0 \rangle,\langle 7,4,1,0 \rangle \rangle}$.

$0 = E \cap \dot{E} = W_{\langle 2\langle 1,0 \rangle\langle 1,1 \rangle \rangle}$, $\qquad V = 0^c$.

$W_a \times W_b = (V \times W_a)^{-1} \cap (V \times W_b)$

$= W_{\langle 2, \langle 6\, b \rangle 7, 6, a \rangle}$.

定理3. $\varphi(x, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ を Σ_1, $Y_1, \cdots, Y_n$ について positive とすれば

$$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_m \forall Y_1 \cdots \forall Y_n \forall X [\forall x [x \in X \equiv \varphi(x, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)] \supset [RE(Y_1) \wedge \cdots \wedge RE(Y_n) \supset RE(X)]]$$

証明. もっと一般に $\varphi(x_1, \cdots, x_l, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ を Σ_1, positive ($Y_1, \cdots, Y_n$ に関し) とするとき,

(*) $RE(Y_1) \wedge \cdots \wedge RE(Y_n)$

$\supset RE(\{\langle x_1, \cdots, x_l \rangle \mid \varphi(x_1, \cdots, x_l, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)\})$

を証明する. これは φ の中の論理記号の数に関する帰納法による. (但し $\neg$ は prime formula にのみついているとする.)

Basis. φ は prime formula, 又はその否定とすると 次のような場合に分れる. φ が

(1) $x_i \in x_j$ (2) $x_i \in y_j$ (3) $y_i \in x_j$ (4) $y_i \in y_j$ (5) $x_i \in Y_j$ (6) $y_i \in Y_j$

(1)′ $x_i \notin x_j$ (2)′ $x_i \notin y_j$ (3)′ $y_i \notin x_j$ (4)′ $y_i \notin y_j$.

このうち (3) (3)′ は $(\neg)\exists t \in x_j \forall s [s \in y_i \equiv s \in t]$ と書きなおせるから、prime の場合から除いてよい. 他の場合のうち (4), (4)′, (6) は φ が $x_1, \cdots, x_l$ を含まないから, φ が成り立つか, 成り立たないかに従って

$$\{\langle x_1 \cdots x_l \rangle \mid \varphi\} = V^l \text{ 又は } 0$$

であるから，いずれの場合も，T.2.により (*) は成り立つ．

φ が (2) の形のときは

$$\{\langle x_1 \text{—} x_l\rangle \mid \varphi\} = \underbrace{V\times\cdots\times V}_{i-1\text{個}} \times y_j \times \underbrace{V\times\cdots\times V}_{l-i\text{個}}$$

となる（但し×の結合は後からとする）のでやはり rec. enum. である．(3)′，(5) の場合も同様である．残った (1) (1)′ の場合は Gödel の monograph の M1 の証明のようにやればよい．即ち，先ず（$i<j$ としてよい）

$$\{\langle x_{i'} x_{j'}\rangle \mid \varphi\} \;(=E, E^{-1}, \dot{E}, \dot{E}^{-1} \text{のいずれか})$$

を作り、後を一ぺんにふやし　(i', j' は $\min(i,j)$, $\max(i,j)$)

$$\{\langle x_{i'} x_{j'} \langle x_{j'+1} \cdots x_l\rangle\rangle \mid \varphi\}$$

を作り、以下　順次

$$\{\langle x_{i'}\, x_s \cdots x_{j'-1}\, x_{j'} \cdots x_l\rangle \mid \varphi\} \quad (s = j'-1, j'-2, \cdots, i'+1)$$

$$\{\langle x_k\, x_{k+1} \cdots x_{i'} \cdots x_l\rangle \mid \varphi\} \quad (k = i', i'-1, \cdots, 1)$$

を作ればよい．　これらの操作は、すべて T1, T2 の中の演算の結合で表現できるから、定理は成り立つ．なお、この場合の方法は φ が $x_i = x_j$ のときも通用することを、後のためここで注意する．

Induction Step.　一番外の論理記号が $\wedge$ 又は $\vee$ のときは帰納法の仮定を用いれば、容易に示される．一番外に quantifier がつく場合は、次の3通りに分れる．

(1) φ が $\exists x\,\psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ の形のとき,

(2) φ が $\forall x \in y_j\,\psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ の形のとき,

(3) φ が $\forall x \in x_i\,\psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ の形のとき.

(1) の場合、$A = \{\langle x, x_1, \cdots, x_\ell\rangle \mid \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$ とすれば, 帰納法の仮定により

$\mathcal{RE}(Y_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{RE}(Y_\ell) \supset \mathcal{RE}(A)$

がえる. $\{\langle x_1 - x_\ell\rangle \mid \varphi\} = \mathcal{D}(A)$ であるから, 上のこと及び T1 から(*) が示される.

(2)の場合. $A = \{\langle x, x_1, \cdots, x_\ell\rangle \mid \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$ とすれば $A^\pi = \{\langle t\, x_1 \cdots x_\ell\rangle \mid \forall x \in t\ \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$

$\{\langle x_1, \cdots, x_\ell\rangle \mid \varphi\} = A^{\pi, -1}{}''\{y_j\}$

だから (1) の場合と同様に (*) が示される.

(3) の場合. $A = \{\langle x\, x_1 \cdots x_\ell\rangle \mid \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$ とすれば $A^\pi = \{\langle t\, x_1, \cdots, x_\ell\rangle \mid \forall x \in t\ \psi(x, x_1, \cdots, x_\ell, \cdots)\}$ 故に

$\{\langle x_1 \cdots x_\ell\rangle \mid \varphi\} = \mathcal{D}(A^\pi \cap I_i^\ell)$ ここに

$I_i^\ell = \{\langle x_i\, x_1 \cdots x_\ell\rangle \mid x_1, \cdots, x_n \in V\}$

$= \{\langle x_1 \cdots x_{\ell+1}\rangle \mid x_1 = x_{i+1}\}$

でこれは r.e. であることが上の注意からわかる. あとは(1)

(2) の場合と同様に(*)が示される.（証明終）

定理4. $\varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ が Σ_1 で $Y_1, \cdots, Y_n$ に関し positive とすれば

$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_m \forall Y_1 \cdots \forall Y_n \forall X [\forall x [x \in X \overset{ind}{\equiv} \varphi(x, X; y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)] \wedge \mathcal{RE}(Y_1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{RE}(Y_n) \supset \mathcal{RE}(X)]$.

証明. 定理3に,[ ] の Theorem 1 と同様な方法で reduce する.

上の一般的な定理3, 4により次のことがわかる.

定理5. (i) 次の Class は rec. enum. である：任意の set a, V, E, I, O_n, W (ii) A, B が rec. enum. ならば次のものも r. e. である：$A \cup B$, $A \cap B$, $\mathcal{V}(A)$, $\mathcal{P}(A)$, $Conv_i(A)$ $(i=1, 2, 3)$, $A \times B$, A^n, A^π, A^σ, A_a, $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{W}(A)$, $A \circ B$.
(iii) 次のものは n 変数 recursive functions である. $(n \geq 1)$.

$C^n_{(a)} \overset{df}{=} \{ \langle a x \rangle \mid x \in V^n \}$ $(a \in V)$.

$I^n_i \overset{df}{=} \{ \langle x_i x_1 \cdots x_n \rangle \mid x_j \in V, j=1, \cdots, n \}$.

$P_n \overset{df}{=} \{ \langle \langle x_1 \cdots x_n \rangle x_1 \cdots x_n \rangle \mid x_j \in V, j=1, \cdots, n \}$.

(iv) A を n 変数の partial recursive function, $B_1, \cdots, B_n$ を m 変数の partial recursive functions とすれば

$A \circ (B_1, \cdots, B_n) \overset{df}{=} \{ \langle y x_1 \cdots x_m \rangle \mid \exists y_1 \cdots \exists y_m$

$[\langle y\, y_1 \cdots y_n \rangle \in A \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} [\langle y_i\, x_1 \cdots x_m \rangle \in B_i]]\}$（合成関数）もm変数の partial recursive function である.

また $\mathcal{PRF}$, $\mathcal{RC}$, $\mathcal{RF}_n$ の定義より

T.3. $\mathcal{PRF}(A) \wedge \mathcal{RC}(\mathcal{D}(A)) \supset \mathcal{RC}(A)$,

$\mathcal{RF}_n(A) \supset \mathcal{RC}(A)$,

が証明される. さて partial recursive function の理論はあとまわしにして recursively enumerable class の理論を先に展開する.

Wはそれ自身 r.e. であり, かつ任意の r.e. class A は適当な set a に対し $A = W_a$ と表わされるから, Wは r.e. の universal class とよぶ. 対角線論法により

T.4. $\neg \mathcal{RC}(W)$

が成り立つ.

$A = W_a$ のとき a を A の (r.e.) code とよぶ.

定理6. 定理5(ii)で, (A, B が r.e. であるとき) r.e. なることの示された class の code は A (又は A, B) の code(s) の recursive function (1変数又は2変数) として求められる. 例えば

$\vdash \exists X[\mathcal{RF}_2(X) \wedge \forall a \forall b[W_{X'\langle ab\rangle} = W_a \cup W_b]]$.

(この場合 $X = \{\langle\langle 3ab\rangle ab\rangle \mid a, b \in V\}$ とすればよい.)

T.5. $\exists S[\mathcal{RF}_2(S) \wedge \forall e \forall a[W_{S'\langle ea\rangle} = W_{e,a}]]$

$(W_{e,a} = (W_e)_a.)$

証明. $W_{e,a} = W_e^{-1}``\{a\}$ であるから S を, $\mathcal{RF}_2(S)$ で

$S'\langle ea\rangle = \langle 5, 7, 2, \langle 7, a\rangle, 6, 0, \{a\}\rangle$ である様なもの

とすればよい.

T. 6. (i) $\forall F[\mathcal{RF}(F) \supset \exists a[W_{F'a} = W_a]]$.

(ii) $\forall X[\mathcal{RE}(X) \supset \exists a[W_a = X_a]]$.

証明. (ii) のみ行う.

$A = \{\langle ex\rangle \mid \langle S'\langle ee\rangle, x\rangle \in X\}$

は r.e. であるから, その code を f とし $a = S'\langle f, f\rangle$ とおけば

$$\begin{aligned} W_a &= W_{S'\langle ff\rangle} = W_{f,f} \\ &= \{x \mid \langle fx\rangle \in A\} = \{x \mid \langle S'\langle ff\rangle, x\rangle \in X\} \\ &= X_a. \end{aligned}$$

(T. 6. は Strong recursion theorem とよばれる.)

D. 4. $\Phi_a(X) \overset{\mathrm{df}}{\equiv} \{x \mid \exists y[\langle xy\rangle \in W_a \wedge y \subseteq X]\}$

を enumeration operator とよぶ.

D. 5. (i) $A \leq_e^{[a]} B$ (A is enumeration reducible to B with a code a) $\overset{\mathrm{df}}{\equiv}$ $A = \Phi_a(B)$.

(ii) $A \leq_e B$ (A is enumeration reducible to B) $\overset{\mathrm{df}}{\equiv}$ $\exists a[A \leq_e^{[a]} B]$.

$\leq_e$ は reflexive かつ transitive ~~な~~関係でありさらに

T.7. $A \leq_e B \wedge \mathcal{RE}(B) \supset \mathcal{RE}(A)$

である.

定理7. $\varphi(x, X)$ を Σ_1 で X に関して *positive* とすれば

$\vdash \forall x[x \in A \equiv \varphi(x, B)] \supset A \leq_e B]$.

証明. 定理3 の証明を相対化すればよい.

D.6. (i) $A \upharpoonright^{[a]} B$ (*A is r.e. in B with code a*)

$\overset{df}{\equiv} A = \{x \mid \exists y \exists z [\langle x y z \rangle \in W_a \wedge y \subseteq B \wedge z \cap B = 0]\}$.

(ii) $A \upharpoonright B$ (*A is r.e. in B*) $\overset{df}{\equiv} \exists a [A \upharpoonright^{[a]} B]$.

D.7. (i) $A \leq_T^{\langle ab \rangle} B \overset{df}{\equiv} A \upharpoonright^{[a]} B \wedge -A \upharpoonright^{[b]} B$.

(ii) $A \leq_T B$ (*A is recursive in B*)

$\equiv \exists a \exists b [A \leq_T^{\langle ab \rangle} B]$.

§3. *partial recursive functions* と *uniformization of recursively enumerable classes.*

RBG の中では r.e. *class* の *uniformization principle* を証明できない. これを可能にするために $V=L$ を公理として付加する.

T.8. $\mathcal{RC}(R) \wedge \mathcal{RC}(S) \wedge \mathcal{RC}(J) \wedge \mathcal{RC}(F) \wedge \mathcal{RC}(Od)$ $\wedge \mathcal{RC}(K_i)$ $i=1,2$. (R, S, J, F, K_i, Od は Gödel の *monograph* の通り).

証略.

D.8. $\langle xy\rangle \in \prec \; (\equiv x \prec y) \overset{\mathrm{df}}{\equiv} Od'x < Od'y$.

T.9. $RC(\prec) \wedge \prec$ is a well ordering of V.

T.10. (Uniformization principle).

(i) $RE(A) \supset \exists B[PRF(B) \wedge B \subseteq A \wedge \mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(A)]$.

(ii) $\exists W'[RE(W') \wedge \forall e[W'_e \subseteq W_e \wedge Un(W'_e) \wedge \mathfrak{D}(W'_e) = \mathfrak{D}(W_e)]]$

証明. $Q \overset{\mathrm{ind}}{\equiv} \{\langle\langle 0a\rangle 0 x\rangle \mid x \in a\}$

$\cup \{\langle\langle 1,0\rangle, 0, \langle xy\rangle\rangle \mid x \in y\}$

$\cup \{\langle\langle 1,1\rangle, 0, \langle xy\rangle\rangle \mid x \notin y\}$

$\cup \{\langle\langle 2ab\rangle, \langle uv\rangle, x\rangle \mid \langle aux\rangle \in Q \wedge \langle bvx\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 3ab\rangle, u, x\rangle \mid \langle aux\rangle \in Q \vee \langle bux\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 4a\rangle, z, \langle xy\rangle\rangle \mid \forall t \in x\, \exists s \in z[\langle as\langle ty\rangle\rangle \in Q]\}$

$\cup \{\langle\langle 5a\rangle, z, x\rangle \mid \exists u \in z\, \exists y \in z[\langle au\langle yx\rangle\rangle \in Q]\}$

$\cup \{\langle\langle 6a\rangle, z, \langle xy\rangle\rangle \mid \langle azy\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 7a\rangle, z, \langle xy\rangle\rangle \mid \langle a, z\langle yx\rangle\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 8a\rangle, u, \langle xyz\rangle\rangle \mid \langle a, u, \langle xzy\rangle\rangle \in Q\}$

$\cup \{\langle\langle 9a\rangle, u, \langle xyz\rangle\rangle \mid \langle a, u, \langle yzx\rangle\rangle \in Q\}$,

と定義すれば明らかに

$$\forall e[RC(Q_e) \wedge W_e = \mathfrak{D}(Q_e)].$$

そこで

$W' = \{\langle e\langle xy\rangle\rangle \mid \exists z[\langle ezxy\rangle \in Q \wedge \forall t \forall s[\langle ts\rangle \prec \langle zx\rangle$

$\supset \langle e t s y \rangle \notin Q]]\}$ と定義すればよい。定義の中の formula は $\exists z \exists u [\langle e z x y \rangle \in Q \wedge \forall t \in u \forall s \in u [\langle t s \rangle \prec \langle z x \rangle$ $\supset \langle e t s y \rangle \notin Q]]\}$ と同値であるから W' は r.e. である。

このW′が(ii)をみたすことの証明は略す。

D.9. (i) $\{e\}(x) \simeq z \equiv \langle e z x \rangle \in W'$,

(ii) $\{e\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq z \equiv \langle e z x_1 \cdots x_n \rangle \in W'$.

T.11. (Enumeration Theorem).

$\lambda x \{e\}(x)$ は partial recursive functions の enumeration である：即ち

$\forall X [PRF(X) \supset \exists e [X = W'_e = \{\langle z x \rangle \mid \{e\}(x) \simeq z\}]]$.

多変数の場合も同様。

T.12. (s-m-n 定理)

$\exists S^m_n [RF_{m+n}(S^m_n) \wedge \forall x_1 \cdots \forall x_m \forall y_1 \cdots \forall y_n \forall e$
$[\{e\}(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) \simeq \{S^m_n ! \langle e x_1 \cdots x_m \rangle\}(y_1, \cdots, y_n)]]$.

T.13. (Strong recursion theorem).

$\forall X [PRF_{n+1}(X) \supset \exists e \forall x_1 \cdots \forall x_n [\{e\}(x_1, \cdots, x_n)$
$\simeq X ' \langle e x_1 \cdots x_n \rangle]]$.

これらの帰納関数論の基本定理の一般化により、帰納関数論が形式的に展開できる。しかし例えば $\Delta^1_1 = HA$ のような hierarchy の高い理論は、一般に成りたたない。

参考文献

[1] S. Kripke, Transfinite Recursion, Constructible sets and Analogues of cardinals preprint for 1967 UCLA Summer Institute for set theory.

[2] M. Takahashi, An Induction Principle in set theory I, to appear in Yokohama Mathematical Journal.